

2019 ~ 2020 学年度
武汉市部分学校新高三起点质量监测

文科数学

武汉市教育科学研究院命制

2019.9.6

本试题共 5 页, 22 题。全卷满分 150。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答卷前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦擦干净后, 再选涂其它答案标号。
3. 非选择题的作答: 用黑色墨水的签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z = \frac{1+i}{1-i}$, 则 $|z| =$
A. 0 B. 1 C. $\sqrt{5}$ D. 3
2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x > -1\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | -1 < x < 2\}$ B. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$
C. $\{x | -1 < x \leq 2\}$ D. $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$
3. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{m^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{5}{4}$, 则 E 的焦距为
A. 4 B. 5 C. 8 D. 10



4. 已知 α, β 是两个不重合的平面, 直线 $a \subset \alpha, p: a // \beta, q: \alpha // \beta$, 则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知函数 $f(x) = a \sin x + \cos x (a \in \mathbb{R})$ 为偶函数, 则 $f(-\frac{\pi}{3}) =$

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知曲线 $C_1: y = \sqrt{2} \sin 2x, C_2: y = \sin 2x + \cos 2x$, 则下面结论正确的是

A. 把曲线 C_1 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个长度单位, 得到曲线 C_2

B. 把曲线 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位, 得到曲线 C_2

C. 把曲线 C_2 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位, 得到曲线 C_1

D. 把曲线 C_2 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个长度单位, 得到曲线 C_1

7. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - a$. 若 $f(x)$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是

A. $[0, 1)$

B. $(0, 1)$

C. $(0, \frac{1}{e})$

D. $[0, \frac{1}{e})$

8. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点均在球 O 的球面上, $PA = PB = PC = 2$, 且 PA, PB, PC 两两互相垂直, 则球 O 的体积为

A. $16\sqrt{3}\pi$

B. $8\sqrt{3}\pi$

C. $4\sqrt{3}\pi$

D. $2\sqrt{3}\pi$

9. 已知 $a = 2\ln 3^2, b = 3\ln 2^2, c = 3\ln 2^3$, 则 a, b, c 的大小关系是

A. $b < a < c$

B. $c < b < a$

C. $b < c < a$

D. $a < b < c$

10. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 $(4, 0)$ 且斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则

$$|MF| + |NF| =$$

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

11. 设同时抛掷两个质地均匀的四面分别标有 1, 2, 3, 4 的正四面体一次. 记事件 $A = \{\text{第一个四面体向下的一面出现偶数}\}$; 事件 $B = \{\text{第二个四面体向下的一面出现奇数}\}$; $C = \{\text{两个四面体向下的一面或者同时出现奇数, 或者同时出现偶数}\}$. 给出下列结论:

① $P(A) = \frac{1}{2}$; ② $P(AB) = \frac{1}{4}$; ③ $P(ABC) = \frac{1}{8}$, 其中正确的结论个数为

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3



12. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), $f(\frac{\pi}{3}) = 1$ 且 $f(\frac{\pi}{4}) = -1$, 当 ω 取

最小值时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为

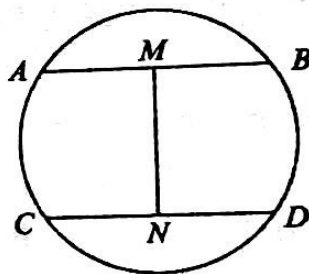
- A. $[\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}], k \in \mathbb{Z}$ B. $[\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$
C. $[-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}], k \in \mathbb{Z}$ D. $[-\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若曲线 $y = ax^3$ 在点 $(1, a)$ 处的切线与直线 $y = 3x$ 平行, 则实数 a 的值为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$, 则 $a_{2019} =$ _____.

15. 武汉是一座美丽的城市, 这里湖泊众多, 一年四季风景如画, 尤其到了夏季到东湖景区赏景的游客络绎不绝. 如图是东湖景区中一个半径为 100 米的圆形湖泊, 为了方便游客观赏, 决定在湖中搭建一个“工”字形栈道, 其中 $AB = CD$, M, N 分别为 AB, CD 的中点, 则栈道最长为_____米.



16. 已知平面向量 a, b, e 满足 $|e| = 1, a \cdot e = 1, b \cdot e = 1, |a - b| = 4$, 则 $a \cdot b$ 的最小值为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 + a_7 = 22$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .



18. (12 分)

在 2018、2019 年高考数学全国 I 卷中,第 22 题考查坐标系和参数方程,第 23 题考查不等式选讲. 2018 年高考结束后,某校经统计发现:选择第 22 题的考生较多并且得分率也较高. 为研究 2019 年选做题得分情况,该校高三质量检测的命题完全采用 2019 年高考选做题模式,在测试结束后,该校数学教师对全校高三学生的选做题得分进行抽样统计,得到两题得分的统计表如下(已知每名学生只选做一道题):

第 22 题的得分统计表

得分	0	3	5	8	10
理科人数	50	50	75	125	200
文科人数	25	25	125	0	25

第 23 题的得分统计表

得分	0	3	5	8	10
理科人数	30	52	58	60	200
文科人数	5	10	10	5	70

- (1) 完成如下 2×2 列联表,并判断能否有 99% 的把握认为“选做题的选择”与“文、理科的科类”有关;

	选做 22 题	选做 23 题	总计
理科人数			
文科人数			
总计			

- (2) 若以全体高三学生选题的平均得分作为决策依据,如果你是考生,根据上面统计数据,你会选做哪道题,并说明理由.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828



19. (12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a \cos B = c - \frac{1}{2}b$, 且 $a = 2\sqrt{3}$.

(1) 求 A ;

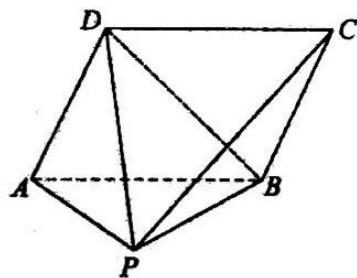
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

20. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为平行四边形, $BA = BP = BD = AP = 2, DA = DP = \sqrt{2}$.

(1) 求证: $PA \perp BD$;

(2) 求点 C 到平面 PBD 的距离.



21. (12 分)

设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, 过点 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 点

P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程;

(2) 设 $A(1, 0)$, 在 x 轴上是否存在一定点 B , 使 $|BP| = 2|AP|$ 总成立? 若存在, 求出 B 点坐标; 若不存在, 说明理由.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (a - x) \sin x - \cos x$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 证明: $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一零点;

(2) 若 $f(x) \leq 2$ 对 $\forall x \in (0, \pi)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

