

第二讲 分式

一、知识归纳

(一) 分式的运算规律

1、加减法

$$\text{同分母分式加减法: } \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

$$\text{异分母分式加减法: } \frac{a}{b} \pm \frac{d}{c} = \frac{ac \pm bd}{bc}$$

$$2、\text{乘法: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$3、\text{除法: } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$4、\text{乘方: } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

(二) 分式的基本性质

$$1、\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} (m \neq 0)$$

$$2、\frac{a}{b} = \frac{a \div m}{b \div m} (m \neq 0)$$

(三) 比例的性质

$$(1) \text{ 若 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 则 } ad = bc$$

$$(2) \text{ 若 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 则 } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \text{ (合比性质)}$$

$$(3) \text{ 若 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ (} b-d \neq 0 \text{) 则 } \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \text{ (合分比性质)}$$

$$(4) \text{ 若 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots = \frac{m}{n}, \text{ 且 } b+d+\cdots+n \neq 0 \text{ 则 } \frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n} = \frac{a}{b} \text{ (等比性质)}$$

(四) 分式求解的基本技巧

1、分组通分

2、拆项添项后通分

3、取倒数或利用倒数关系

4、换元化简

5、局部代入

6、整体代入

7、引入参数

8、运用比例性质

二、例题解析

例 1：化简 $\frac{1-x-x^2+x^3}{1-2|x|+x^2}$

例 2：化简：

$$\frac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} + \frac{b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3} + \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{b^2+a^2} - \frac{a^2+3b^2}{a^4-b^4}$$

例 3：计算

$$\frac{\frac{n^2}{m^2} + \frac{m^2}{n^2} + 2}{\frac{n^3}{m^3} - \frac{m^3}{n^3} - 3\left(\frac{n}{m} - \frac{m}{n}\right)} \div \frac{\frac{n}{m} + \frac{m}{n}}{\frac{n^2}{m^2} + \frac{m^2}{n^2} - 2}$$

例 4: 计算

$$\frac{b-c}{a^2-ab-ac+bc} - \frac{c-a}{b^2-bc-ab+ac} + \frac{a-b}{c^2-ac-bc+ab}$$

例 5: 若 $abc=1$, 求 $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$

例 6: 已知 $\frac{x+y-z}{z} = \frac{x-y+z}{y} = \frac{-x+y+z}{x}$ 且 $xyz \neq 0$

求分式 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ 的值

三、课堂练习

1、已知 $1 = \frac{xy}{x+y}$, $z = \frac{yz}{y+z}$, $3 = \frac{xz}{x+z}$, 则 $x =$ _____;

2、若 $x = \sqrt{19-4\sqrt{3}}$ 则分式 $\frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15} =$ _____;

3、设 $\frac{x}{x^2 - mx + 1} = 1$, 则 $\frac{x^3}{x^6 - m^3x^3 + 1} =$ _____;

4、若 $abc \neq 0$, 且 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$, 则 $\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} =$ _____;

5、设 x 、 y 、 z 为有理数, 且 $x+y+z \neq 0$, $\frac{x}{y+z} = a$, $\frac{y}{z+x} = b$, $\frac{z}{x+y} = c$,

则 $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} =$ _____;

6、已知 a 、 b 、 c 均不为 0, 且 $a+b+c=0$, 则

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = \text{_____};$$