

第四讲 三角形的“五心”

一、知识归纳

1、重心：三角形的三条中线交点，它到顶点的距离等于它到对边中点的距离的 2 倍，重心和三顶点的连线将 $\triangle ABC$ 的面积三等分，重心一定在三角形内部。

2、外心：是三角形三边中垂线的交点，它到各顶点的距离相等，锐角三角形的外心在三角形内，直角三角形的外心是斜边的中点，钝角三角形的外心在三角形外。

3、内心：是三角形的三内角平分线的交点，它到三边的距离相等，内心一定在三角形内。

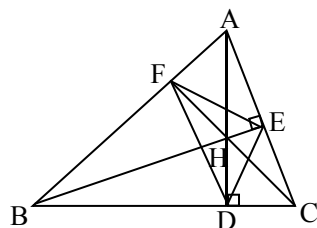
4、垂心：是三角形三条高的交点，垂心和三角形的三个顶点，三条高的垂足组成六组四点共圆，锐角三角形的垂心在三角形内，直角三角形的垂心为直角顶点，钝角三角形的垂心在三角形外。

5、旁心：是三角形任意两角的外角平分线和第三个角的内角平分线的交点，它到三角形的三边距离相等，一定位于三角形外部。

二、例题解析

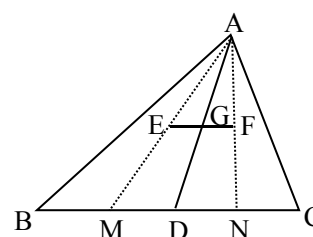
例 1：在锐角 $\triangle ABC$ 中，内角为 A 、 B 、 C 三边为 a 、 b 、 c ，则内心到三边的距离之比为_____，重心到三边的距离为_____，外心到三边的距离之比为_____，垂心到三边的距离之比为_____。

例 2：如图，锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H ，三条高的垂足分别为 D 、 E 、 F ，则 H 是 $\triangle DEF$ 的_____；



- A、垂心 B、重心
C、内心 D、外心

例 3: 如图, D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任一点, 点 E、F 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心连结 EF 交 AD 于 G 点, 则 DG: GA = _____;

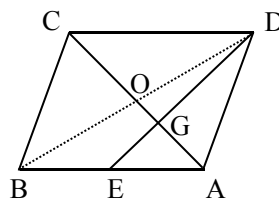


例 4: 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G, $GA = 2\sqrt{3}$, $GB = 2\sqrt{2}$, $GC = 2$, 则 $S_{\triangle ABC} =$ _____;

例 5: 若 H 为 $\triangle ABC$ 的重心, $AH = BC$, 则 $\angle BAC$ 的度数是 _____;

- A、 45° B、 30° C、 30° 或 150° D、 45° 或 135°

例 6: 已知平行四边形 ABCD 中, E 是 AB 的中点, $AB=10$, $AC=9$, $DE=12$, 求平行四边形 ABCD 的面积。



三、课堂练习

1、已知三角形的三边长分别为 5, 12, 13, 则其垂心到外心的距离为_____, 重心到垂心的距离为_____;

2、已知三角形的三边长为 5, 12, 13, 则其内切圆的半径 $r =$ _____;

3、在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 是钝角, O 是垂心, $AO=BC$, 则 $\cos(\angle OBC + \angle OCB) =$ _____;

4、设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $AG=6$, $BG=8$, $CG=10$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____;

5、若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 那么以 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha \cdot \cot \alpha$ 为三边的 $\triangle ABC$ 的内切圆, 外接圆的半径之和为_____;

A、 $\frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$

B、 $\frac{1}{2}(\tan \alpha + \cot \alpha)$

C、 $2 \sin \alpha \cos \alpha$

D、 $\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

6、 $\triangle ABC$ 的重心为 G, M 在 $\triangle ABC$ 的平面内, 求证:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2$$