

第八讲 均值不等式

【要点归纳】

当 $a, b, c > 0$ 时, 则

$$(1) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时, 取 “=”})$$

$$(2) \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad (\text{当且仅当 } a=b=c \text{ 时, 取 “=”})$$

更一般地, 当 $a_i > 0$ ($i = 1, 2, 3 \dots n$) 时,

$$\text{则 } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (\text{当且仅当 } a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ 时, 取 “=”})$$

【典例分析】

例 1 设 $a, b, c > 0$, 证明下列不等式:

$$(1) \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$$

$$(2) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

例 2 下列命题中有_____个正确

$$(1) \text{函数 } f(x) = x + \frac{4}{x} \text{ 的最小值是 } 4;$$

$$(2) \text{函数 } f(x) = \sqrt{4+x^2} + \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \text{ 的最小值是 } 2$$

$$(3) \text{函数 } f(x) = 1 - 2x - \frac{6}{x} (x > 0) \text{ 的最大值是 } 1 - 4\sqrt{3}$$

$$(4) \text{函数 } f(x) = x + \frac{4}{x^2} (x > 0), \text{ 当 } x=1 \text{ 时, 取最小值。}$$

例 3 (1) 已知 $x, y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$, 求 $x+y$ 的最小值;

(2) 已知 $x, y > 0$ ，且 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ ，求 $x\sqrt{1+y^2}$ 的最大值。

例 4 (1) 当 $x > 1$ 时，求 $y = x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值；

(2) 当 $x < \frac{5}{4}$ 时，求 $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$ 的最大值。

例 5 (1) 当 $a, b > 0$ 时，证明： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

(2) 设 $a > b > c$ ，求使得不等式 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{k}{a-c}$ 恒成立的 k 的最大值。

例 6 某食品厂定期购买面粉，已知每吨面粉的价格为 1800 元，该厂每天需用面粉 6 吨，面粉的保管费为平均每吨每天 3 元，因需登记入库，每次所购面粉不能当天使用，每次购面粉需支付运输费 900 元，求该厂多少天购买一次面粉，才能使平均每天所支付的总费用最少？

【反馈练习】

1、已知 $a, b > 0$ ，且 $a+b=1$ ，求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值。

2、函数 $y=x(1-2x)$ ($0 < x < \frac{1}{2}$) 的最大值等于_____；此时 $x=$ _____

3、函数 $y = ax + \frac{2}{x^2}$ ($x > 0, a > 0$) 的最小值为 6，则实数 $a=$ _____

4、已知 $a, b > 0$ ，且 $ab=3+a+b$ ，求 ab 的取值范围。

5、求函数 $y = \frac{x}{3(x^2 + 1)}$ ($x > 0$) 的最大值及相应的 x 的值。

6、设计一幅宣传画，要求画面面积为 4840 cm^2 ，画面的宽与高的比为 λ ($\lambda < 1$)，画面的上下各留 8 cm

空白，左右各留 5 cm 空白，怎样确定画面的高与宽尺寸，能使宣传画所用纸张面积最小？