

第九讲 一次分式函数

【要点归纳】

形如 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (a, c 不同时为 0) 的函数, 叫做一次分式函数。

(1) 特殊地, $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 叫做反比例函数;

(2) 一次分式函数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (a, c 不同时为 0) 的图象是双曲线, $x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c}$ ($c \neq 0$) 是两条渐近线, 对称中心为 $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ ($c \neq 0$)。

【典例分析】

例 1 说明函数 $y = \frac{3x}{x+1}$ 的图象可由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象经过怎样的平移变换而得到, 并指出它的对称中心。

例 2 求函数 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 在 $-3 \leq x \leq -2$ 上的最大值与最小值。

例 3 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位, 向上平移 3 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象

(1) 求 $g(x)$ 的表达式;

(2) 求满足 $g(x) \leq 2$ 的 x 的取值范围。

例 4 求函数 $y = \frac{3-x}{2x+1}$ ($x \geq 0$) 的值域。

例 5 函数 $f(x) = \frac{x+a}{x-1}$, 当且仅当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$

(1) 求常数 a 的值;

(2) 若方程 $f(x) = mx$ 有唯一的实数解, 求实数 m 的值。

例 6 已知 $y = \frac{a}{x} (x > 0, a > 0)$ 图象上的点到原点的最短距离为 6

(1) 求常数 a 的值;

(2) 设 $y = \frac{a}{x} (x > 0, a > 0)$ 图象上三点 A、B、C 的横坐标分别是 $t, t+2, t+4$, 试求出最大的正整数 m ,

使得总存在正数 t , 满足 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\frac{m}{t}$ 。

【反馈练习】

1、若函数 $y = 2/(x-2)$ 的值域为 $y \leq 1/3$, 则其定义域为_____。

2、函数 $y = -\frac{2x-1}{x+3}$ 的图象关于点_____对称。

3、若直线 $y=kx$ 与函数 $y = \frac{x+9}{x+5}$ 的图象相切, 求实数 k 的值。

4、画出函数 $y = \frac{1-|x|}{x-1}$ 的图象。

5、若函数 $y = \frac{ax+1}{x+2}$ 在 $(-2, +\infty)$ 是增函数，求实数 a 的取值范围。

6、(1) 函数 $y = \frac{ax+1}{x-1}$ 的定义域、值域相同，试求出实数 a 的值；
(2) 函数 $y = \frac{ax+1}{x-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，试求出实数 a 的值。