注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置．

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

3．非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．

4．考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交．

一、单选题

1 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

抛物线 $y=2x^2$ 的焦点坐标为(　　)

A．$(1,0)$　　B．$\left(\frac{1}{2},0\right)$　　C．$\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　D．$\left(0,\frac{1}{8}\right)$

答案

D

解析

【分析】：根据抛物线标准方程，可求得 p，进而求得焦点坐标．

将抛物线方程化为标准方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$，可知 $p=\frac{1}{4}$

所以焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{8}\right)$．

故选 D

备注

【点睛】：本题考查了抛物线的基本性质，属于基础题．

2 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y+3\geqslant 0 \\ x-y+1\leqslant 0 \\ y\geqslant -1 \end{cases}$ 则 $z=-3x+4y$ 的最大值为(　　)

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

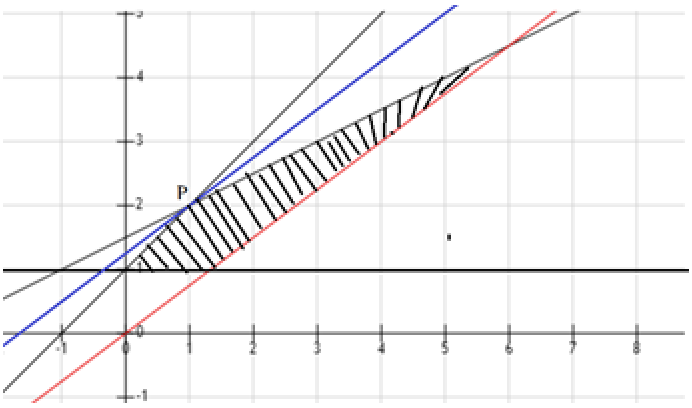
答案

B

解析

【分析】：利用线性约束条件，画出可行域，将目标函数平移可得最大值．

根据约束条件，画出可行域如下图所示：



将图中目标函数（红色）$y=\dfrac{3}{4}x$ 平移，可知当平移经过 P 点（蓝色）时目标函数取得最大值，此时 $P(1,2)$

所以最大值为 $z=-3\times 1+4\times 2=5$．

所以选 B

备注

【点睛】：本题考查了线性规划的简单应用，注意可行域的选择，属于基础题．

3 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

点 M 的直角坐标为 $\left(-2,-2\sqrt{3}\right)$，则点 M 的一个极坐标为(　　)

A. $\left(4,\dfrac{\pi}{6}\right)$　　B. $\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$　　C. $\left(4,\dfrac{7}{6}\pi\right)$　　D. $\left(4,\dfrac{4}{3}\pi\right)$

答案

D

解析

【分析】：根据极坐标与直角坐标的转化公式即可求得直角坐标.

由极坐标与直角坐标转化公式，$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}\end{cases}$

代入得 $\begin{cases}\rho^2=(-2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2=16\\ \tan\theta=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}\end{cases}$

因为 $M(-2,-2\sqrt{3})$ 位于第三象限，所以 $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$

所以极坐标 $M(\rho,\theta)$ 为 $M\left(4,\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

所以选 D

备注

【点睛】：本题考查了极坐标与直角坐标的转化，注意点所在的象限，属于基础题.

4 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

已知圆 C_1：$x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2+4x-10y+4=0$ 相交于 A、B 两点，则线段 AB 的垂直平分线的方程为(　　)

A．$x+y-3=0$　　B．$x+y+3=0$　　C．$3x-3y+4=0$　　D．$7x+y-9=0$

答案

A

解析

【分析】：两个圆相减，可得交点弦所在的直线方程；再由弦的垂直平分线过圆心及斜率关系，求得 AB 的垂直平分线方程．

圆 C_1：$x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2+4x-10y+4=0$ 相交于 A、B 两点

所以 AB 所在的直线方程为两个方程相减，得 $3x-3y+4=0$

AB 垂直平分线的斜率为 $x+y+b=0$

圆 C_1：$x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 的圆心为 $(1,2)$

将 $(1,2)$ 代入 $x+y+b=0$ 解得 $b=-3$

所以 AB 的垂直平分线的方程为 $x+y-3=0$．

故选 A

备注

【点睛】：本题考查了圆方程的简单应用，注意相关性质的用法，属于基础题．

5 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

曲线 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与曲线 $\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1(k<9)$ 的(　　)

A．长轴长相等　　B．短轴长相等　　C．离心率相等　　D．焦距相等

答案

D

解析

【分析】：分别求出两椭圆的长轴长、短轴长、离心率、焦距，即可判断．

曲线 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 表示焦点在 x 轴上，长轴长为 10，短轴长为 6，离心率为 $\dfrac{4}{5}$，焦距为 8．

曲线 $\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1(k<9)$ 表示焦点在 x 轴上，长轴长为 $2\sqrt{25-k}$，短轴长为 $2\sqrt{9-k}$，离心率为 $\dfrac{4}{\sqrt{25-k}}$，焦距为 8．

对照选项，则 D 正确．

故选 D

备注

【点评】：本题考查椭圆的方程和性质，考查运算能力，属于基础题．

6 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

过点 $P(2,2)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2-2x+2y-2=0$ 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=2\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为(　　)

A．$4x-3y+2=0$

B．$4x-43y+2=0$ 或 $x=2$

C．$4x-3y+2=0$ 或 $y=2$

D．$y=2$ 或 $x=2$

答案

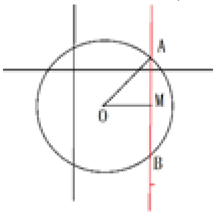
C

解析

【分析】：根据题意，画出图形，讨论斜率是否存在时的情况，进而利用点到直线的距离公式求得直线方程．

作 $OM\perp AB$ 于 M，由题意可知 $AM=\sqrt{3}$，$OA=2$，圆心坐标为 $(1,-1)$

所以 $OM=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，即圆心到直线的距离为 1，如下图所示



当直线斜率不存在时，直线方程为 $x=2$，此时圆心到直线距离为 1，复合要求

当直线斜率存在时，设直线方程为 $y=k(x-2)+2$，即 $kx-y-2k+2=0$

由点到直线距离公式可知 $d=\dfrac{|k+1-2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$

解方程得 $k=\dfrac{4}{3}$，所以直线方程为 $y=\dfrac{4}{3}(x-2)+2$，即 $4x-3y-2=0$

综上所述，直线方程为 $x=2$ 或 $4x-3y-2=0$．

所以选 B

备注

【点睛】：本题考查了直线与圆的位置关系，关键要记住讨论斜率不存在的情况，属于基础题．

7 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

已知方程 $\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$ 的曲线为 C，下面四个命题中正确的个数是(　　)

① 当 $1<t<4$ 时，曲线 C 不一定是椭圆；

② 当 $t>4$ 或 $t<1$ 时，曲线 C 一定是双曲线；

③ 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，则 $1<t<\dfrac{5}{2}$；

④ 若曲线 C 是焦点在 y 轴上的双曲线，则 $t>4$．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

答案

D

解析

【分析】：根据椭圆与双曲线标准方程及其意义，可判断四个选项是否正确．

对于 ①，当 $t=\dfrac{5}{2}$ 时，曲线表示为圆，所以不一定是椭圆，所以 ① 正确

对于 ②，当 $t>4$ 时表示焦点在 y 轴上的双曲线，当 $y<1$ 曲线 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆，所以一定是双曲线，所以 ② 正确

对于 ③ 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，则 $\begin{cases}4-t>0\\t-1>0\\4-t>t-1\end{cases}$，解得 $1<t<\dfrac{5}{2}$，所以 ③ 正确

对于 ④ 若曲线 C 是焦点在 y 轴上的双曲线，则 $\begin{cases}4-t>0\\t-1>0\end{cases}$，解得 $t>4$，所以 ④ 正确

综上，四个选项都正确

所以选 D

备注

【点睛】：本题考查了椭圆与双曲线标准方程及其关系，注意符号问题，属于基础题．

8 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

已知直线 $3x+4y+4=0$ 与圆 M：$x^2+y^2-2ax=0(a>0)$ 相切，则圆 M 和圆 N：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系是(　　)

A．相离　　B．外切　　C．相交　　D．内切

答案

C

解析

【分析】：根据直线与圆 M 相切，可利用圆心到直线距离等于半径求得参数 a；再根据圆心距与半径和的大小判断圆与圆的位置关系．

因为直线 $3x+4y+4=0$与圆 M：$x^2+y^2-2ax=0$ 相切，且 $a>0$

M：$(x-a)^2+y^2=a^2$，所以圆心坐标为 $(a,0)$，半径为 a

则圆心到直线距离等于半径，所以

$a=\dfrac{|3a+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}$，解方程得 $a=2$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$（舍）

所以圆 M 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，N：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

MN 的距离为 $MN=\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$，两个圆的半径和为 3

因为$\sqrt{2}<3$

所以两个圆相交．

故选 C

备注

【点睛】：本题考查了直线与圆、圆与圆位置关系的应用，属于基础题．

9 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

数学家欧拉在 1765 年发现，任意三角形的外心、重心、垂心位于同一条直线上，这条直线称为欧拉线已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(2,0)$，$B(0,4)$，若其欧拉线的方程为 $x-y+2=0$，则顶点 C 的坐标为(　　)

A．$(-4,0)$　　B．$(-3,-1)$　　C．$(-5,0)$　　D．$(-4,-2)$

答案

A

解析

【分析】：设出点 C 的坐标，由重心坐标公式求得重心，代入欧拉线得一方程，求出 AB 的垂直平分线，和欧拉线方程联立求得三角形的外心，由外心到两个顶点的距离相等得另一方程，两方程联立求得点 C 的坐标．

设 $C(m,n)$，由重心坐标公式得，三角形 ABC 的重心为 $\left(\dfrac{2+m}{3},\dfrac{4+n}{3}\right)$ 代入欧拉线方程得：

$\dfrac{2+m}{3}-\dfrac{4+n}{3}+2=0$ 整理得：$m-n+4=0$　①

AB 的中点为 $(1,2)$，$k_{AB}=\dfrac{4-0}{0-2}=-2$，$AB$ 的中垂线方程为 $y-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$，

即 $x-2y+3=0$，联立 $\begin{cases}x-2y+3=0\\x-y+2=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC$ 的外心为 $(-1,1)$，

则 $(m+1)^2+(n-1)^2=3^2+1^2=10$，整理得：$m^2+n^2+2m-2n=8$　②

联立 ①② 得：$m=-4$，$n=0$ 或 $m=0$，$n=4$．

当 $m=0$，$n=4$ 时 B，C 重合，舍去，$\therefore$ 顶点 C 的坐标是 $(-4,0)$．

故选 A

备注

【点睛】：本题考查了直线方程，求直线方程的一般方法：① 直接法：根据已知条件，选择适当的直线方程形式，直接求出直线方程．② 待定系数法：先设出直线的方程，再根据已知条件求出假设系数，最后代入直线方程，待定系数法常适用于斜截式，已知两点坐标等．

10 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点且与抛物线交于 A，B 两点，则 $4|AF|+|BF|$ 的最小值是(　　)

A．10　　B．9　　C．8　　D．7

答案

B

解析

【分析】：根据抛物线中过焦点的两段线段关系，可得 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$；再由基本不等式可求得 $4|AF|+|BF|$ 的最小值.

由抛物线标准方程可知 $p=2$

因为直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，由过抛物线焦点的弦的性质可知

$$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$$

所以

$$\begin{aligned}&4|AF|+|BF|\\=&(4|AF|+|BF|)\cdot\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}\right)\\=&4+1+\left(\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right)\end{aligned}$$

因为 $|AF|$、$|BF|$ 为线段长度，都大于 0，由基本不等式可知

$$\begin{aligned}&4+1+\left(\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right)\\\geqslant&5+2\sqrt{\frac{|BF|}{|AF|}\times\frac{4|AF|}{|BF|}}\\\geqslant&5+2\times2\\\geqslant&9\end{aligned}$$

此时 $|BF|=2|AF|$.

故选 B

备注

【点睛】：本题考查了抛物线的基本性质及其简单应用，基本不等式的用法，属于中档题.

11 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

若点 A，F 分别是椭圆 F：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左顶点和左焦点，过点 F 的直线交曲线 F 于 M，N 两点，记直线 AM，AN 的斜率为 k_1，k_2，其满足 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=1$，则直线 MN 的斜率为(　　)

A．2　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{6}{5}$　　D．$\frac{1}{2}$

答案

B

解析

【分析】：设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，将直线 MN 的方程与椭圆的方程联立，列出韦达定理，利用斜率公式以及韦达定理，结合条件 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=1$，可求出 m 的值，从而可得出直线 MN 的斜率．

椭圆 F：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左焦点为 $F_2(-1,0)$，设直线 MN 的方程为 $x=my-1$，设点 $M(x_1, y_1)$、$N(x_2, y_2)$，

将直线 MN 与椭圆 C 的方程联立，消去 x 得，$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$，

点 A 的坐标为 $(-2,0)$，

$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=1$，$1=\frac{x_1+2}{y_1}+\frac{x_2+2}{y_2}=\frac{my_1+1}{y_1}+\frac{my_2+1}{y_2}=\frac{2my_1y_2+(y_1+y_2)}{y_1y_2}$，

化简得 $(2m-1)y_1y_2+(y_1+y_2)=0$，可得 $-\frac{9}{3m^2+4}(2m-1)+\frac{6m}{3m^2+4}=0$，

化简得 $4m-3=0$，解得 $m=\frac{3}{4}$，

因此，直线 MN 的方程为：$4x-3y-4=0$．

则直线 MN 的斜率为：$\frac{4}{3}$．

故选 B

备注

【点睛】：本题考查了椭圆的基本性质及其综合应用，余弦定理求椭圆斜率的用法，计算量较大，易出错，属于难题．

12 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

设 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，直线 l 过 F_1 交椭圆 C 于 A，B 两点，交 y 轴于 C 点，若满足 $\overrightarrow{F_1C}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AF_1}$ 且 $\angle CF_1F_2=30^\circ$，则椭圆的离心率为(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

答案

A

解析

【分析】：根据椭圆中线段关系，表示出 $|AF_1|=\dfrac{4\sqrt{3}c}{9}$，$|F_1F_2|=2c$，$|AF_2|=2a-\dfrac{4\sqrt{3}c}{9}$．由余弦定理即可求得 a 与 c 的关系，进而求得离心率．

因为 F_1 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，直线 l 过 F_1 交 y 轴于 C 点

所以 $F_1(-c,0)$，即 $|OF_1|=c$

因为 $\angle CF_1F_2=30^\circ$，所以 $|CF_1|=\dfrac{2\sqrt{3}c}{3}$

又因为 $\overrightarrow{F_1C}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AF_1}$

所以 $|AF_1|=\dfrac{4\sqrt{3}c}{9}$

在三角形 AF_1F_2 中，$|AF_1|=\dfrac{4\sqrt{3}c}{9}$，$|F_1F_2|=2c$，$|AF_2|=2a-\dfrac{4\sqrt{3}c}{9}$，

根据余弦定理可得 $\cos\angle AF_1F_2=\dfrac{|AF_1|^2+|F_1F_2|^2-|AF_2|^2}{2|AF_1||F_1F_2|}$，

代入得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{4\sqrt{3}c}{9}\right)^2+(2c)^2-\left|2a-\dfrac{4\sqrt{3}c}{9}\right|^2}{2\left(\dfrac{4\sqrt{3}c}{9}\right)(2c)}$，化简得 $a=\sqrt{3}c$

所以离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

故选 A

备注

【点睛】：本题考查了椭圆的基本性质及其综合应用，余弦定理求椭圆斜率的用法，计算量较大，易出错，属于难题．

二、填空题

13 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$ 上的一点 P 到它的一个焦点的距离等于 3，那么点 P 到另一个焦点的距离等于 ________.

答案

5

解析

【分析】：根据双曲线定义即可求得 P 到另外一个点的距离，根据 c 与 p 到一个焦点距离的大小比较即可得到解.

双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$，根据双曲线定义可知，$a=1$，$b=\sqrt{15}$，$c=4$

$||PF_1|-|PF_2||=2a$，且 $||PF_1|-|PF_2||<|F_1F_2|$

所以 $||PF_1|-|PF_2||=2$ 且 $||PF_1|-|PF_2||<8$

且 P 到它的一个焦点的距离等于 3，设 $|PF_1|=2$

代入 $||PF_1|-|PF_2||=2$ 则解得 $|PF_2|=5$ 或 $|PF_2|=1$

因为 c 大于 P 到它的一个焦点的距离 3，所以 $|PF_2|>3$

所以 $|PF_2|=5$.

备注

【点睛】：本题考查了双曲线的定义及性质的简单应用，注意要讨论得到的解是否符合题设要求，属于中档题.

14 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

当直线 l：$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0(m\in\mathbf{R})$ 被圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 截得的弦最短时，m 的值为________.

答案

$-\dfrac{3}{4}$

解析

【分析】：先求得直线过定点 $M(3,1)$，分析可知当直线 l 与 CM 垂直时，直线被圆截得的弦长最短，进而利用斜率的关系即可求得 m 的值.

直线 l 的方程可化为 $(2x+y-7)m+x+y-4=0$，

所以直线 l 会经过定点 $\begin{cases}2x+y-7=0\\x+y-4=0\end{cases}$，解得定点坐标为 $M(3,1)$，圆 C 圆心坐标为 $(1,2)$，

当直线 l 与 CM 垂直时，直线被圆截得的弦长最短，

$k_{CM}=\dfrac{2-1}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$，$k_l=-\dfrac{2m+1}{m+1}$，

所以 $k_{CM}\cdot k_l=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{2m+1}{m+1}\right)=-1$，解方程得 $m=-\dfrac{3}{4}$.

备注

【点睛】：本题考查了直线与圆的位置关系，根据斜率关系求得参数的值，属于基础题.

15 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

已知椭圆 F：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与双曲线 Ω：$\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$ 共焦点，F_1、F_2 分别为左、右焦点，曲线 F 与 Ω 在第一象限交点为 P，且离心率之积为 1．若 $\sin\angle F_1PF_2=2\sin\angle PF_1F_2$，则该双曲线的离心率为________．

答案

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

解析

【分析】：根据正弦定理，可得 $|PF_2|=c$，根据椭圆与双曲线定义可求得 $a=m+c$，结合椭圆与双曲线的离心率乘积为 1，可得 $c^2-m^2-mc=0$，进而求得双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{m}$．

设焦距为 $2c$

在三角形 PF_1F_2 中，根据正弦定理可得 $\dfrac{|PF_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\angle PF_1F_2}$

因为 $\sin\angle F_1PF_2=2\sin\angle PF_1F_2$，代入可得

$|F_1F_2|=2|PF_2|$，所以 $|PF_2|=c$

在椭圆中，$|PF_1|+|PF_2|=|PF_1|+c=2a$

在双曲线中，$|PF_1|-|PF_2|=|PF_1|-c=2m$

所以 $|PF_1|=2a-c$，$|PF_1|=2m+c$

即 $2a-c=2m+c$

所以 $a=m+c$

因为椭圆与双曲线的离心率乘积为 1

即 $\dfrac{c}{a}\times\dfrac{c}{m}=1$，即 $a=\dfrac{c^2}{m}$

所以 $m+c=\dfrac{c^2}{m}$

化简得 $c^2-m^2-mc=0$，等号两边同时除以 m^2

得 $\left(\dfrac{c}{m}\right)^2-\dfrac{c}{m}-1=0$，因为 $\dfrac{c}{m}$ 即为双曲线离心率

所以若双曲线离心率为 e，则上式可化为 $e^2-e-1=0$

由一元二次方程求根公式可求得 $e=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

因为双曲线中 $e>1$

所以 $e=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$．

备注

【点睛】：本题考查了椭圆与双曲线性质的综合应用，正弦定理的应用，双曲线离心率的表示方法，计算量复杂，属于难题．

16 2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）

设抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，直线 l 过 F 且与抛物线交于 P，Q 两点．若 $|PQ|=\dfrac{32}{3}$，且 $|PF|>|QF|$，则 $\dfrac{|PF|}{|QF|}=$______．

答案

3

解析

【分析】：根据抛物线中过焦点的两段线段关系，可得 $\dfrac{1}{|PF|}+\dfrac{1}{|QF|}=\dfrac{2}{p}=\dfrac{1}{2}$；根据 $|PQ|=\dfrac{32}{3}$ 可分别求得两个线段的长度，进而求得 $\dfrac{|PF|}{|QF|}$ 的值．

因为 $|PQ|=\dfrac{32}{3}$，所以 $|PF|=\dfrac{32}{3}-|QF|$

由抛物线标准方程可知 $p=4$

因为直线l过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，由过抛物线焦点的弦的性质可知

$\dfrac{1}{|PF|}+\dfrac{1}{|QF|}=\dfrac{2}{p}=\dfrac{1}{2}$

代入得 $\dfrac{1}{\dfrac{32}{3}-|QF|}+\dfrac{1}{|QF|}=\dfrac{1}{2}$，解方程可求得 $|QF|=\dfrac{8}{3}$ 或 8

因为 $|PF|>|QF|$

所以 $|QF|=\dfrac{8}{3}$，$|PF|=8$

所以 $\dfrac{|PF|}{|QF|}=3$．

备注

【点睛】：本题考查了抛物线的基本性质及其简单应用，属于基础题．

三、解答题

17 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

某工艺厂有铜丝 5 万米，铁丝 9 万米，准备用这两种材料编制成花篮和花盆出售．已知编制一只花篮需要铜丝 200 米，铁丝 300 米；编制一只花盆需要铜丝 100 米，铁丝 300 米．设该厂用所有原料编制 x 个花篮，y 个花盆．

(1) 列出 x、y 满足的关系式，并画出相应的平面区域；

(2) 若出售一个花篮可获利 300 元，出售一个花盆可获利 200 元，那么怎样安排花篮和花盆的编制个数，可使所得利润最大，最大利润是多少?

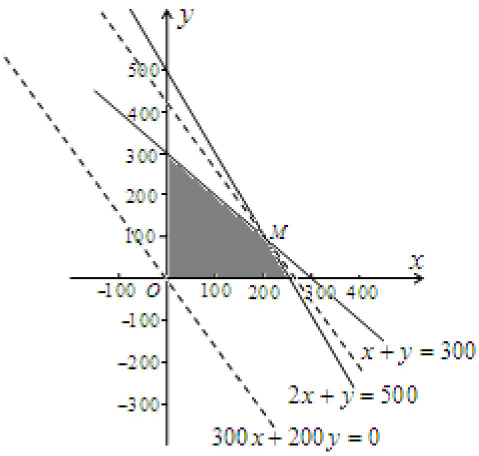
(1)

答案

见解析

解析

【分析】：列出 x、y 满足的关系式为 $\begin{cases}200x+100y\leqslant 50000\\300x+300y\leqslant 90000\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，画出不等式组所表示的平面区域即可．



由已知 x、y 满足的关系式

为 $\begin{cases}200x+100y\leqslant 50000\\300x+300y\leqslant 90000\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，等价于 $\begin{cases}2x+y\leqslant 500\\x+y\leqslant 300\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$

该二元一次不等式组所表示的平面区域如图中的阴影部分．

(2)

答案

该厂编制 200 个花篮，100 花盆所获得利润最大，最大利润为 8 万元．

解析

【分析】：设该厂所得利润为 z 元，写出目标函数，利用目标函数的几何意义，求解目标函数 $z=300x+200y$，所获得利润．

设该厂所得利润为 z 元，则目标函数为 $z=300x+200y$，

将 $z=300x+200y$ 变形为 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{200}$，这是斜率为 $-\frac{3}{2}$，

在 y 轴上截距为 $\frac{z}{200}$、随 z 变化的一族平行直线，

又因为 x、y 满足约束条件，所以由图可知，当直线 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{200}$，

经过可行域上的点 M 时，$\frac{z}{200}$ 最大，即 z 最大，

解方程组 $\begin{cases}2x+y=500\\x+y=300\end{cases}$ 得点 M 的坐标为且恰为整点，即 $x=200$，$y=100$，

所以，$z_{\max}=300\times200+200\times100=80000$．

答：该厂编制 200 个花篮，100 花盆所获得利润最大，最大利润为 8 万元．

18 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

已知双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$．

(1) 求与双曲线 C 有共同的渐近线，且实轴长为 20 的双曲线的标准方程；

(2) P 为双曲线 C 右支上一动点，点 A 的坐标是 $(4,0)$，求 $|PA|$ 的最小值．

(1)

答案

$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{75}=1$ 或 $\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{\frac{400}{3}}=1$

解析

【分析】：设出双曲线方程，利用实轴长为 20，求解 m 即可得到双曲线方程．

双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$．

与双曲线 C 有共同的渐近线．

设 $\frac{x^2}{4m}-\frac{y^2}{3m}=1$．

当 $m>0$，$4m=100\Rightarrow m=25$．

当 $m<0$，$-3m=100\Rightarrow m=-\frac{100}{3}$．

$\therefore$ 标准方程为 $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{75}=1$ 或 $\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{\frac{400}{3}}=1$．

(2)

答案

$\frac{3\sqrt{21}}{7}$

解析

【分析】：设出 P 的坐标．利用 $|PA|$ 的表达式，求解最小值即可．

设 $P(x,y)$．

$\therefore$

$$\begin{aligned}&PA^2=(x-4)^2+y^2\\&=\frac{7}{4}x^2-8x+13\\&=\frac{7}{4}\left(x-\frac{16}{7}\right)^2+\frac{27}{7}\\&\geqslant\frac{27}{7}\end{aligned}$$

即 $|PA|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{21}}{7}$．

备注

【点睛】：本题主要考查双曲线的标准方程的求法，考查函数的最值，意在考查学生对这些知识的掌握水平和分析推理计算能力．

19 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

已知直线 l 与抛物线 C：$y^2=2x$ 交于点 A，B 两点，与 x 轴交于点 M，直线 OA，OB 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$.

(1) 证明：直线 AB 过定点；

(2) 以 AB 为直径的圆 P 交 x 轴于 E，F 两点，O 为坐标原点，求 $|OE|\cdot|OF|$ 的值.

(1)

答案

见解析

解析

【分析】：设出直线 AB 的方程，联立抛物线得到关于 y 的一元二次方程，根据斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$，结合韦达定理代入化简即可得到 AB 过定点.

设直线 AB：$x=my+n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases} y^2=2x \\ x=my+n \end{cases}$ 消去 x 得，$y^2-2my-2n=0$

$\therefore \begin{cases} \Delta=4m^2+8n>0 \\ y_1+y_2=2m \\ y_1y_2=-2n \end{cases}$

$\because k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{y_1y_2}{\dfrac{{y_1}^2{y_2}^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1y_2}=-\dfrac{1}{2}$

则 $y_1y_2=-8$，那么 $n=4$ 满足 $\Delta=4m^2+8n>0$

即 AB：$x=my+4$，即 AB 过定点 $(4,0)$.

(2)

答案

8

解析

【分析】：表示出以 A、B 为直径的圆的方程，设出 E、F 的坐标，结合韦达定理即可表示出 $x_Ex_F=8$，进而求得 $|OE||OF|$ 的值.

$\because$ 以 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 为直径端点的圆的方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

设 $E(x_E,0)$，$F(x_F,0)$，则 x_E，x_F 是方程 $(x-x_1)(x-x_2)+(0-y_1)(0-y_2)=0$

即 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y_1y_2=0$ 的两个实根

$\therefore$ 有 $x_Ex_F=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{{y_1}^2{y_2}^2}{4}+y_1y_2=\dfrac{64}{4}-8=8$

$\therefore |OE||OF|=|x_Ex_F|=8$.

备注

【点睛】：本题考查了直线与抛物线的位置关系，直线过定点问题的求法，属于中档题.

20 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆心在 x 轴上、半径为 2 的圆 C 位于 y 轴右侧，且与直线 $x-\sqrt{3}y+2=0$ 相切.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 在圆 C 上，是否存在点 $M(m,n)$，使得直线 l：$mx+ny=1$ 与圆 O：$x^2+y^2=1$ 相交于不同的两点 A，B，且 $\triangle OAB$ 的面积最大? 若存在，求出点 M 的坐标及对应的 $\triangle OAB$ 的面积；若不存在，请说明理由.

(1)

答案

$(x-2)^2+y^2=4$

解析

设圆心是 $(x_0,0)(x_0>0)$，

它到直线 $x-\sqrt{3}y+2=0$ 的距离是 $d=\dfrac{|x_0+2|}{\sqrt{1+3}}=2$，

解得 $x_0=2$ 或 $x_0=-6$（舍去），

$\therefore$ 所求圆 C 的方程是 $(x-2)^2+y^2=4$.

(2)

答案

存在；$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ 与 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$；$\dfrac{1}{2}$

解析

$\because$ 点 $M(m,n)$ 在圆 C 上，

$\therefore (m-2)^2+n^2=4$，$n^2=4-(m-2)^2=4m-m^2$ 且 $0\leqslant m\leqslant 4$，

又 $\because$ 原点到直线 l：$mx+ny=1$ 的距离 $h=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4m}}<1$，

解得 $\dfrac{1}{4}<m\leqslant 4$，

而 $|AB|=2\sqrt{1-h^2}$，

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle OAB}&=\frac{1}{2}|AB|\cdot h\\&=\sqrt{h^2-h^4}\\&=\sqrt{\frac{1}{4m}-\left(\frac{1}{4m}\right)^2}\\&=\sqrt{-\left(\frac{1}{4m}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

$\because \dfrac{1}{16}\leqslant\dfrac{1}{4m}<1$，

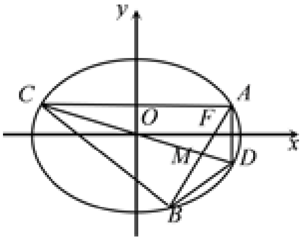
$\therefore$ 当 $\dfrac{1}{4m}=\dfrac{1}{2}$，

即 $m=\dfrac{1}{2}$ 时取得最大值 $\dfrac{1}{2}$，

此时点 M 的坐标是 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ 与 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$，面积的最大值是 $\dfrac{1}{2}$.

21 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过其右焦点 F 且与 x 轴垂直的直线交椭圆 C 于 P，Q 两点，椭圆 C 的右顶点为 R，且满足 $|RP+RQ|=2$．



(1) 求椭圆 C 的方程；
(2) 若斜率为 k（其中 $k\neq 0$）的直线 l 过点 F，且与椭圆交于点 A，B，弦 AB 的中点为 M，直线 OM 与椭圆交于点 C，D，求四边形 $ACBD$ 面积 S 的取值范围．

(1)

答案

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

解析

【分析】：根据离心率及 $|RP+RQ|=2$，结合椭圆的定义即可求得椭圆的方程．

由 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$ 得 $a=2c$

$|\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{RQ}|=|2\overrightarrow{RF}|=2(a-c)=2$

$\therefore \begin{cases} a=2 \\ c=1 \end{cases}$，$b^2=a^2-c^2=3$

$\therefore$ 椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

(2)

答案

$(6,4\sqrt{3})$

解析

【分析】：设出直线方程，联立椭圆方程化简即可得关于 x 的一元二次方程，根据韦达定理即可得 AB 的表达式，然后求得点 C，D 到直线 AB 的距离之和为 $d_C+d_D=\dfrac{|k(x_C-1)-y_C|+|k(x_D-1)-y_D|}{\sqrt{k^2+1}}$，进而表达出四边形 $ACBD$ 面积 S，即可求得 S 的取值范围．

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ y=k(x-1) \end{cases}$ 消 y 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$

$\therefore \Delta=12^2(k^2+1)$ 恒正，$x_A+x_B=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_Ax_B=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$

$\therefore |AB|=\sqrt{(1+k^2)\cdot\dfrac{12^2(k^2+1)}{(4k^2+3)^2}}=\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$，

$M\left(\dfrac{4k^2}{4k^2+3},-\dfrac{3k}{4k^2+3}\right)$，$\therefore k_{OM}=-\dfrac{3}{4k}$

（此处也可以用点差法：由 $\begin{cases}\dfrac{x_A{}^2}{4}+\dfrac{y_A{}^2}{3}=1\\ \dfrac{x_B{}^2}{4}+\dfrac{y_B{}^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $\dfrac{x_A{}^2-x_B{}^2}{4}+\dfrac{y_A{}^2-y_B{}^2}{3}=0$

$\therefore k=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x_A+x_B}{y_A+y_B}=-\dfrac{3x_M}{4y_M}$，$\therefore k_{OM}=\dfrac{y_M}{x_M}=-\dfrac{3}{4k}$）

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=-\dfrac{3}{4k}x\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\pm\dfrac{4k}{\sqrt{4k^2+3}}\\ y=\mp\dfrac{3}{\sqrt{4k^2+3}}\end{cases}$，即为 C、D 两点的坐标，

$\therefore$ 点 C，D 到直线 AB 的距离之和为

$$\begin{aligned}&d_C+d_D\\ =&\frac{|k(x_C-1)-y_C|+|k(x_D-1)-y_D|}{\sqrt{k^2+1}}\\ =&\frac{|[k(x_C-1)-y_C]-[k(x_D-1)-y_D]|}{\sqrt{k^2+1}}\\ =&\frac{|k(x_C-x_D)\text{-}(y_C-y_D)|}{\sqrt{k^2+1}}\\ =&2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore S&=\frac{1}{2}|AB|(d_C+d_D)\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}\times2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}\\ &=12\sqrt{\frac{k^2+1}{4k^2+3}}\\ &=12\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4(4k^2+3)}}(k\neq0)\end{aligned}$$

$\therefore S$ 的取值范围 $=(6,4\sqrt{3})$.

备注

【点睛】：本题考查了椭圆标准方程的求法，直线与椭圆的位置关系，四边形面积问题，考查关系较为综合，属于难题.

22 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

已知极坐标系的极点在平面直角坐标系的原点 O 处，极轴与 x 轴的非负半轴重合，且长度单位相同，直线l的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$．曲线 C：$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\alpha\\y=-2+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$ （α 为参数，且 $\alpha\in[0,2\pi)$）．

(1) 试写出直线 l 的直角坐标方程及曲线 C 的极坐标方程；

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，求 $|AB|$ 的值．

(1)

答案

$\rho^2+4\rho\sin\theta+2=0$

解析

【分析】：直线 l 过原点且倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$，故可得直线的直角方程.对于曲线 C，可先消去参数 α 得到其直角方程，再利用 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 得到曲线 C 的极坐标方程．

直线 l：$y=\sqrt{3}x$，曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y+2)^2=2$，

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入上式得 $\rho^2+4\rho\sin\theta+2=0$，

即为曲线 C 的极坐标方程．

(2)

答案

2

解析

【分析】：将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入曲线 C 的极坐标方程，再利用 $|AB|=|\rho_1-\rho_2|$ 计算 $|AB|$ 的值．

将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入曲线 C 的极坐标方程，得 $\rho^2+2\sqrt{3}\rho+2=0$

$|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=\sqrt{12-8}=2$，则 $|AB|=2$．

备注

【点睛】：极坐标方程与直角方程的互化，关键是 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$，在极坐标系中过极点的直线与其他曲线相交时弦长的计算，可直接利用极径满足的方程结合韦达定理来求．

23 **2019年湖北武汉洪山区华中师大一附中高二上学期期中考试数学试卷（理科）**

当直线$l:(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0\ (m\in R)$ 被圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 截得的弦最短时，m 的值为_______.

答案

$-\dfrac{3}{4}$

解析

【分析】：先求得直线过定点 $M(3,1)$，分析可知当直线l与CM垂直时，直线被圆截得的弦长最短，进而利用斜率的关系即可求得m的值.

直线l的方程可化为$(2x+y-7)m+x+y-4=0$

所以直线l会经过定点$\begin{cases}2x+y-7=0\\x+y-4=0\end{cases}$，解得定点坐标为$M(3,1)$，圆C圆心坐标为$(1,2)$

当直线l与CM垂直时，直线被圆截得的弦长最短

$k_{CM}=\dfrac{2-1}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$，$k_l=-\dfrac{2m+1}{m+1}$

所以$k_{CM}\times k_l=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{2m+1}{m+1}\right)=-1$，解方程得 $m=-\dfrac{3}{4}$.

备注

【点睛】：本题考查了直线与圆的位置关系，根据斜率关系求得参数的值，属于基础题.