

7. 空间两直线异面的判定方法

- (1)反证法；
(2)平面外一点与平面内一点的连线，与平面内不过该点的直线是异面直线.

8. 直线与平面平行的判定

$$\left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ (1) b \subset \alpha \\ a // b \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha \quad (2) \left. \begin{array}{l} a // \beta \\ a \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // \beta$$

9. 直线与平面平行的性质

$$\left. \begin{array}{l} a // \beta \\ a \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$

10. 平面与平面平行的判定

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \beta, b \subset \beta \\ (1) a \cap b = P \\ a // \alpha, b // \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \beta // \alpha \quad (2) \left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta \quad (3) \left. \begin{array}{l} a // \gamma \\ \beta // \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$$

11. 平面与平面平行的性质

$$\left. \begin{array}{l} a // \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$

12. 直线与平面垂直的判定

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha, b \subset \alpha \\ (1) a \cap b = A \\ l \perp a, l \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha \quad (2) \left. \begin{array}{l} a // b \\ a \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha$$

13. 直线与平面垂直的性质

$$(1) \left. \begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \beta // \alpha \quad (2) \left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$

14. 平面与平面垂直的判定

$$(1) \left. \begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha \quad (2) \text{二面角的平面角 } \theta = 90^\circ$$

15. 平面与平面垂直的性质

$$(1) \left. \begin{array}{l} a \perp \beta, \alpha \cap \beta = CD \\ ABC \subset \alpha, AB \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp \beta \quad (2) \left. \begin{array}{l} A \in \alpha, A \in \alpha \\ \alpha \perp \beta, a \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset \alpha$$

九、直线、圆与方程

1. 直线与方程

(1)直线方程

- ①点斜式： $y - y_0 = k(x - x_0)$ ；
②斜截式： $y = kx + b$ ；
③两点式： $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$ ；
④截距式： $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ；
⑤一般式： $Ax + By + C = 0 (A, B \text{ 不同时为 } 0)$.

(2)直线的斜率公式

经过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$ 的直线的斜率公式： $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2)$.

(3)两条直线的位置关系

- ① $l_1(y = k_1x + b_1)$ 与 $l_2(y = k_2x + b_2)$ 平行： $k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$ ；
② $l_1(y = k_1x + b_1)$ 与 $l_2(y = k_2x + b_2)$ 垂直： $k_1 k_2 = -1$ ；
③ $l_1(A_1x + B_1y + C_1 = 0)$ 与 $l_2(A_2x + B_2y + C_2 = 0)$ 平行： $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} (A_2 B_2 C_2 \neq 0)$ ；
④ $l_1(A_1x + B_1y + C_1 = 0)$ 与 $l_2(A_2x + B_2y + C_2 = 0)$ 垂直： $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

(4)距离公式

- ①两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 间的距离：
 $|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. 特别地，原点 $O(0, 0)$ 与任意一点 $P(x, y)$ 的距离 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
②点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离：
 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

③两平行直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 和 $l_2: Ax + By + C_2 = 0$ 间的距离：

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2. 圆与方程

(1)圆与方程

- ①圆的标准方程： $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ，圆心为 (a, b) ，半径为 r .
②圆的一般方程： $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，其中 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ ，圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ ，半径 $r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

(2)直线与圆的位置关系

设直线 $l: Ax + By + C = 0$ ，圆 $C: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ，圆心到直线的距离为 d ，则 $d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ；

- $d > r \Leftrightarrow$ 直线与圆相离；
 $d = r \Leftrightarrow$ 直线与圆相切；
 $d < r \Leftrightarrow$ 直线与圆相交.

(3)过圆上一点的切线方程

- ①与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 相切于点 (x_0, y_0) 的切线方程： $x_0 x + y_0 y = r^2$.
②与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 相切于点 (x_0, y_0) 的切线方程：
 $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$.

(4)圆与圆的位置关系

- 设两圆 $C_1: (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2, C_2: (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$ ，圆心距 $d = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$ ，则
 $|d| > r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 两圆相离；
 $|d| = r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 两圆外切；
 $|r_1 - r_2| < |d| < r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 两圆相交；
 $|d| = |r_1 - r_2| \Leftrightarrow$ 两圆内切；
 $|d| < |r_1 - r_2| \Leftrightarrow$ 两圆内含.

(5)直线被圆所截弦的问题

设直线与圆相交于两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则弦 AB 的长：

- ① $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]}$ (k 为直线 AB 的斜率).
② $|AB| = 2 \sqrt{r^2 - d^2}$ (d 为弦心距, r 为圆的半径).

3. 空间直角坐标系

(1)空间两点间的距离公式

- ①空间中的任意一点 $P(x, y, z)$ 与原点的距离：
 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
②空间中任意两点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离：
 $|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

(2)空间线段的中点坐标

在空间直角坐标系中，若 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ ，则线段 AB 的中点坐标是： $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$.

十、圆锥曲线与方程

1. 椭圆的标准方程及几何性质

- 标准方程： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
焦点： $(\pm c, 0)$ 或 $(0, \pm c)$
离心率： $e = \frac{c}{a} (0 < e < 1, c^2 = a^2 - b^2)$

2. 双曲线的标准方程及几何性质

- 标准方程： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$
焦点： $(\pm c, 0)$ 或 $(0, \pm c)$
渐近线： $y = \pm \frac{b}{a} x$ 或 $y = \pm \frac{a}{b} x$
离心率： $e = \frac{c}{a} (e > 1, c^2 = a^2 + b^2)$

3. 抛物线的标准方程及几何性质

标准方程： $y^2 = 2px (p > 0)$

焦点： $(\frac{p}{2}, 0)$

焦半径： $|MF| = x_0 + \frac{p}{2}$

准线方程： $x = -\frac{p}{2}$

4. 直线截圆锥曲线的弦长

设弦 AB 的端点坐标为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，直线 AB 的斜率为 k ，则
 $|AB| = \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]}$.

十一、平面向量

1. 向量的概念

- (1)向量的基本要素：大小、方向.
(2)向量的表示
字母表示： $\vec{AB}, \mathbf{a}$.
坐标表示： $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$.
(3)向量的模：向量的模即向量的大小，记作 $|\mathbf{a}|$.
若 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ ，则 $|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.
(4)特殊的向量：
①零向量： $\mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow |\mathbf{a}| = 0$.
②单位向量： $\mathbf{a}$ 为单位向量 $\Leftrightarrow |\mathbf{a}| = 1$.
③相等向量：长度相等且方向相同的向量.
设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2)$ ，则 $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

2. 向量的运算

- (1)向量的加减法
几何运算：三角形法则或平行四边形法则.
坐标运算：设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2)$ ，则
 $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$.
(2)实数与向量的积
定义： $\lambda \mathbf{a}$ 是一个向量，满足 $\lambda > 0$ 时， $\lambda \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向； $\lambda < 0$ 时， $\lambda \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 反向； $\lambda = 0$ 时， $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$. $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$.
坐标运算： $\lambda \mathbf{a} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.
(3)向量的数量积
定义： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ ，其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角， $0 \leq \theta \leq \pi$.
坐标运算： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

3. 重要公式

- (1)平面向量基本定理： $\alpha = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 不共线.
(2)距离公式：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ，
 $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
(3)非零向量平行的充要条件： $\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.
(4)非零向量垂直的充要条件： $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.
(5)夹角公式： $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

十二、导数及其应用

1. 几种常见函数的导数

- (1) $c' = 0 (c \text{ 为常数})$ (2) $(x^n)' = nx^{n-1} (n \in \mathbf{Q}, \text{ 且 } n \neq 0)$
(3) $(\sin x)' = \cos x$ (4) $(\cos x)' = -\sin x$
(5) $(e^x)' = e^x$ (6) $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$
(7) $(\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0)$ (8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (x > 0, a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$

2. 导数运算法则

- (1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ ；
(2) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ；
(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} (g(x) \neq 0)$.

3. 复合函数的导数

若函数 $u = g(x)$ 在 x 处可导， $y = f(u)$ 在 u 处可导，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在 x 处可导，且 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

4. 定积分的基本性质

(1) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx (k \text{ 为常数})$ ；

(2) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$ ；

(3) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (其中 $a < c < b$).

5. 微积分基本定理

$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (其中 $F'(x) = f(x)$).

十三、统计与概率

1. 统计

(1)方差与标准差

方差： $s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$

标准差： $s = \sqrt{\frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]}$

其中， $\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

(2)离散型随机变量的均值(或数字期望)与方差

- ①离散型随机变量的均值：
 $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_i p_i + \cdots + x_n p_n$.
性质： $E(aX + b) = aE(X) + b (a, b \text{ 是常数})$ ；
若 X 服从两点分布，则 $E(X) = p$ ；
若 X 服从二项分布，即 $X \sim B(n, p)$ ，则 $E(X) = np$.

②离散型随机变量的方差： $D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$.

- 性质： $D(aX + b) = a^2 D(X) (a, b \text{ 是常数})$ ；
若 X 服从两点分布，则 $D(X) = p(1 - p)$ ；
若 X 服从二项分布，则 $X \sim B(n, p)$ ，则 $D(X) = np(1 - p)$.

2. 概率

(1)概率的加法公式

如果事件 A 与事件 B 互斥，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
若事件 A 与事件 B 为对立事件，则 $P(A) = 1 - P(B)$.

(2)古典概型的概率公式

$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} = \frac{m}{n}$.

(3)几何概型的概率公式

$P(A) = \frac{\text{构成事件 } A \text{ 的区域长度(面积或体积)}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度(面积或体积)}}$.

(4)条件概率

设 A, B 为两个事件，则 A 发生的条件下 B 发生的概率：
 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. 其中 $P(A) > 0$.

如果 B 和 C 是两个互斥事件，则
 $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$.

(5) $P(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n)$. 其中事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

特别地，如果事件 A 与事件 B 相互独立，则有
 $P(AB) = P(A) P(B)$.

(6)①两点分布(0-1 分布)： $P(X=0) = 1 - p, P(X=1) = p$.

②超几何分布： $P(X=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} (k=0, 1, 2, \cdots, m)$.

其中 $m = \min\{M, n\}$ ，且 $n \leq N, M \leq N, m, M, N \in \mathbf{N}^*$.

③二项分布： $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0, 1, 2, \cdots, n$.

十四、常用逻辑用语

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真